

Задача 4: Найти энтроп. функцию непрерывной равномер. асл. распр. на $[0; 2]$.

$$\text{Реш: } H(x) = - \int_0^2 \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} dx = \\ = \frac{1}{2} \log 2 \cdot x \Big|_0^2 = \log 2.$$

Задача 3: Докажите, что

$$P(|X-a| < 3b) \geq \frac{8}{9} \text{ при}$$

$$EX=a, DX=b^2.$$

Решение: $P(|X-a| > \varepsilon) \leq$

$$\leq \frac{DX}{\varepsilon^2}, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(|X-a| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2};$$

$$P(|X-a| < 3b) \geq 1 - \frac{b^2}{9b^2} = \frac{8}{9}$$

Задача: Найти среднее.

Пуассон. м.с. с.р. $\lambda > 1$ н.о.р.с.в. X_i с
мат. ожид. a и дисп. σ^2

Решение:

$$DS = (EN \cdot DX + DN \cdot (EX)^2) \\ = \lambda(a^2 + \sigma^2).$$

Задача: С.в. $X_i (i=1,2)$

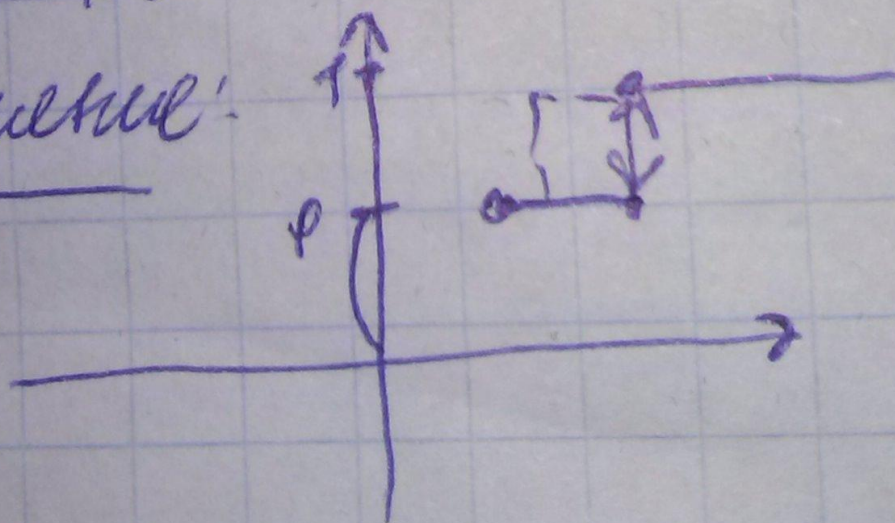
приним. закон 1с.

вер. p и $a_i (|a_i| < 1)$

с вер. $1-p$. Найти
расстояние между

X_1 и X_2 .

Решение:



$$\min(1-p, |a_1 - a_2|).$$

Задание: $X \sim N(0, 1)$;

$$Y = \begin{cases} 1, & \frac{1}{3} \\ 3, & \frac{1}{4} \\ 5, & \frac{1}{4} \end{cases}$$

Найти мат. ожид. случай
 $Z = XY$;

$$\begin{aligned} P(XY < x) &= P\left(X < \frac{x}{Y}\right) = \\ &= P\left(X < \frac{x}{Y} \mid Y=1\right) \cdot P(Y=1) + \\ &+ P\left(X < \frac{x}{Y} \mid Y=3\right) P(Y=3) + \\ &+ P\left(X < \frac{x}{Y} \mid Y=5\right) P(Y=5) = \end{aligned}$$

$$= P(X < x) \cdot \frac{1}{2} + P(X < \frac{x}{3}) \cdot \frac{1}{4} + \\ + P(X < \frac{x}{5}) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\varphi_Z(x) = \varphi(x) \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \varphi(\frac{x}{3}) + \\ + \varphi(\frac{x}{5}) \cdot \frac{1}{20} ;$$

$$E Z = \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi_Z(x) dx = 0.$$

Задача: Найти
диф-ную энтропию
показ. распред. с парамет.

Решение: показ. = $\begin{cases} x e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
распр. =

$$\begin{aligned} H(X) &= E p \log \frac{1}{p} = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \ln e^x dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-x} \cdot x dx = \end{aligned}$$

$$= - \int_0^{\infty} x d e^{-x} =$$

$$= -x e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Задача: Найти гур.
Энтропию норм.
распрег.

Решение:

$$\begin{aligned} & + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ & = \ln \sqrt{2\pi\sigma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx \cdot + \\
 & + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} dx =
 \end{aligned}$$

$$= \ln \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1 \cdot \sigma^2}{2\pi\sigma^2} =$$

$$= \ln \sqrt{2\pi\sigma^2} + \frac{1}{2} .$$

Задача 8: Найти
численно теорет.
апп. суммы $N \sim \text{Geom}(p)$,
 $E\xi = a, D\xi = b$?

Решение:

$$DS = EN \cdot DX + DN \cdot (EX)^2 = \\ = \frac{1-p}{p} \sigma^2 + \frac{1-p}{p} a^2$$

$$N \sim \text{Geom}(p); P(N=k) = (1-p)^{k-1} p$$

Задача 7: Док. №

$$|E\xi - \text{med}\xi| \leq \sqrt{D\xi}.$$

Решение:

$$|E\xi - \text{med}\xi| = |E(\xi - \text{med}\xi)| \leq$$

$$\leq |E|\xi - \text{med}\xi| \leq$$

$$\leq E|\xi - E\xi| =$$

$$= (E|\xi - E\xi|^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq (E|\xi - E\xi|^2)^{1/2} \stackrel{\text{пер-го диспенсн}}{=} \sqrt{D\xi}$$

Задача 5: Найти
дисперсию нулевой
суммы.

Решение: $ES = EX \cdot EN =$
 $= \lambda EX.$

$$DS = (EX)^2 DN + EN(DX)^2$$
$$= a^2 \lambda + \lambda \sigma^2 = \lambda(a^2 + \sigma^2)$$